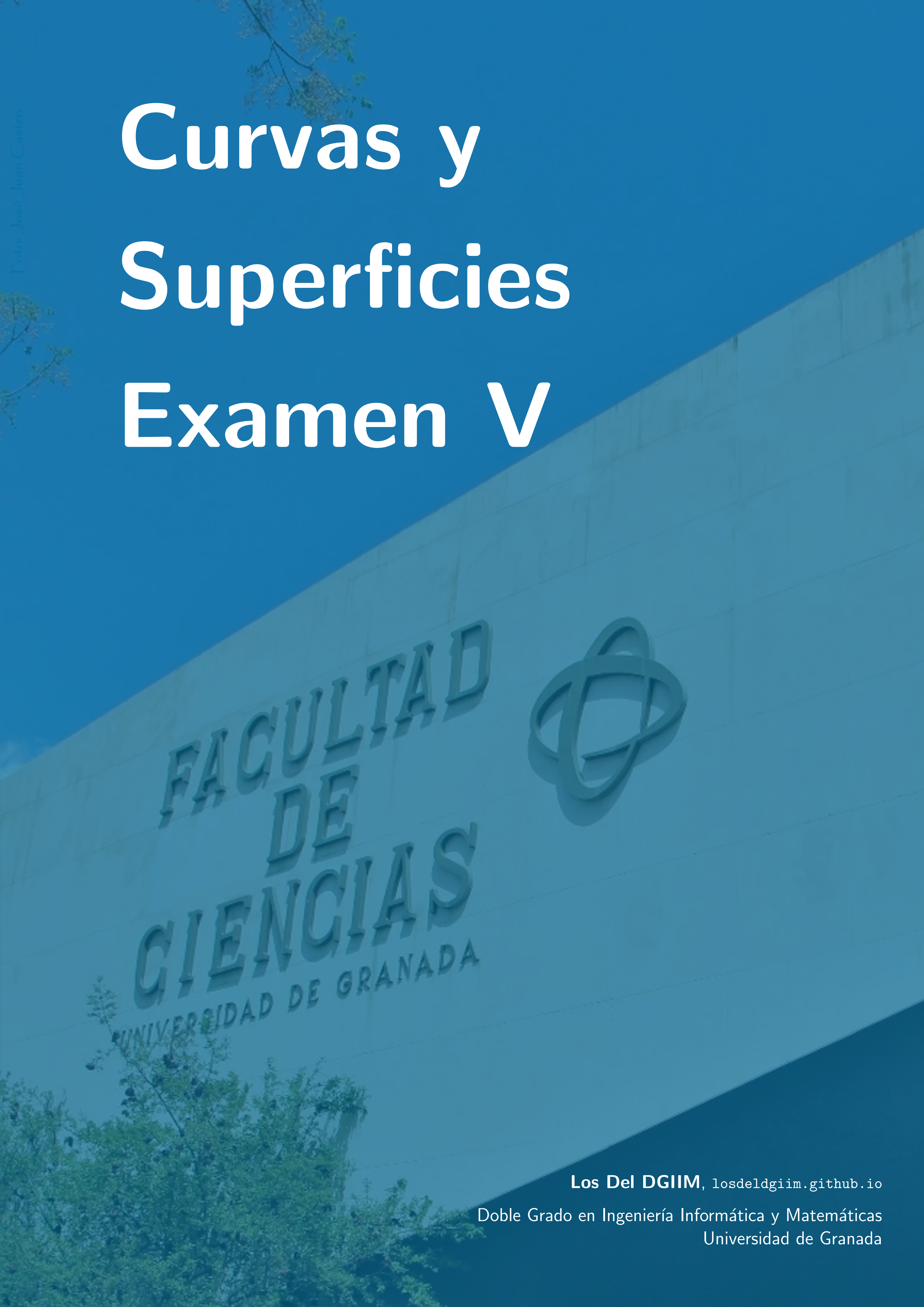

Curvas y Superficies Examen V

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Curvas y Superficies Examen V

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Manuel Sánchez Varbas

Granada, 2026

Asignatura Curvas y Superficies.

Curso Académico 2024-25.

Grado Grado en Matemáticas.

Descripción Ordinaria.

Fecha 17 de Junio de 2025.

Ejercicio 1. Para cada $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ consideremos la curva

$$\alpha_r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \alpha_r(t) = (rt + \cos(t), \sin(t)).$$

a) Probar que α_r es regular y determinar la curvatura de α_r.

b) Deducir que k_{α_r} no se anula si y sólo si $|r| < 1$, y que en ese caso

$$k_{\alpha_r} \geqslant \frac{1 - |r|}{(|r| + 1)^3}.$$

Ejercicio 2. Consideremos el cono

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3(x^2 + y^2) = z^2,\ z > 0\}$$

y la aplicación

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (r, \theta) & \longmapsto & F(r, \theta) := r(\cos(\theta), \sin(\theta), \sqrt{3}) \end{array}$$

a) Probar que C es una superficie regular orientable y que

$$F(]0, +\infty[\times\mathbb{R}) = C.$$

Demostrar que para cada $s \in \mathbb{R}$ la aplicación

$$X_s : \mathbb{R}^+ \times]s, s + 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad X_s = F|_{\mathbb{R}^+ \times]s, s+2\pi[},$$

es una parametrización de C.

b) Demostrar que existe una única aplicación de Gauss $N : C \to \mathbb{S}^2$ tal que

$$N \circ F = \frac{F_r \times F_\theta}{\|F_r \times F_\theta\|}.$$

Determinar la expresión local en la carta X_s de C, $s \in \mathbb{R}$, de la primera forma fundamental, la segunda forma fundamental, el endomorfismo de Weingarten, la curvatura de Gauss, la curvatura media y las curvaturas y direcciones principales (en la dirección de N). Determinar para cada $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y $\omega \in \mathbb{R}^2$ la única geodésica en C que pasa por $G(p)$ con velocidad $dG(p) \in T_{G(p)}C$.

c) Identificando $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ con la superficie regular

$$(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \times \{0\}$$

de $\mathbb{R}^3$, probar que la aplicación

$$G : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow C, \qquad G(u, v) = \frac{1}{2\sqrt{u^2 + v^2}}(u^2 - v^2, 2uv, \sqrt{3}(u^2 + v^2)),$$

es una isometría local entre superficies regulares.

Ejercicio 3. Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes cuestiones:

a) Si S_1, S_2 son superficies regulares orientables isométricas en $\mathbb{R}^3$, entonces S_1 es mínima si y sólo si S_2 es mínima.

b) El hiperboloide

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 + 1\}$$

es isométrico al cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Solución.

Ejercicio 1. Para cada $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ consideremos la curva

$$\alpha_r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \alpha_r(t) = (rt + \cos(t), \sin(t)).$$

a) Probar que α_r es regular y determinar la curvatura de α_r.

Para ver que α_r es regular, tenemos que ver, por definición de curva regular, que $\alpha_r'(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Es claro que

$$\alpha_r'(t) = (r - \operatorname{sen} t, \cos t)$$

Ahora

$$\alpha_r'(t) = 0 \iff \begin{cases} r - \operatorname{sen} t = 0 \\ \cos t = 0 \end{cases}$$

Por la segunda ecuación, necesariamente $t = \pi/2 + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. La primera queda entonces

$$r - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$$

y dado que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \in \{-1, 1\} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

tenemos que

$$r - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0 \iff \begin{cases} r - 1 = 0 \iff r = 1 & k \text{ mód } 2 = 0 \\ r + 1 = 0 \iff r = -1 & k \text{ mód } 2 = 1 \end{cases}$$

Es decir, $\alpha_r'(t) = 0 \iff r \in \{-1, 1\}$. Teniendo esto último en cuenta, es inmediato que

$$\boxed{\alpha_r \text{ es regular para cada } r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}}$$

Para obtener la curvatura, fijado $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, dado que α_r es plana, puesto que el codominio es $\mathbb{R}^2$, y regular, podemos usar la fórmula vista en teoría:

$$k_{\alpha_r}(t) = \frac{\det(\alpha_r'(t), \alpha_r''(t))}{|\alpha_r'(t)|^3}$$

Calculamos el numerador, usando que $\alpha_r''(t) = (-\cos t, -\operatorname{sen} t)$

$$\det(\alpha_r'(t), \alpha_r''(t)) = \begin{vmatrix} r - \operatorname{sen} t & -\cos t \\ \cos t & -\operatorname{sen} t \end{vmatrix} = -(r - \operatorname{sen} t) \operatorname{sen} t + \cos^2 t =$$

$$-r \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 - r \operatorname{sen} t$$

y el denominador (trabajamos con la norma euclídea denotada por $|\cdot|$)

$$|\alpha_r'(t)|^2 = (r - \operatorname{sen} t)^2 + \cos^2 t = r^2 - 2r \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = r^2 - 2r \operatorname{sen} t + 1 \implies$$

$$|\alpha_r'(t)|^3 = (r^2 - 2r\operatorname{sen} t + 1)^{3/2}$$

y juntando ambas cosas

$$k_{\alpha_r}(t) = \frac{1 - r\operatorname{sen} t}{(r^2 - 2r\operatorname{sen} t + 1)^{3/2}}$$

b) Deducir que k_{α_r} no se anula si y sólo si $|r| < 1$, y que en ese caso

$$k_{\alpha_r} \geqslant \frac{1 - |r|}{(|r| + 1)^3}.$$

Como el denominador nunca se anula por ser la curva regular, tenemos que

$$k_{\alpha_r}(t) = 0 \iff 1 - r\operatorname{sen} t = 0 \iff \operatorname{sen} t = \frac{1}{r}$$

Como $\operatorname{sen}(t) \in [-1, 1]$ para todo $t \in \mathbb{R}$, debe ser

$$\frac{1}{|r|} = \left|\frac{1}{r}\right| \leqslant 1 \iff |r| \geqslant 1$$

Pero $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, luego $|r| \neq 1$ y

$$k_{\alpha_r}(t) = 0 \iff |r| > 1$$

y entonces está claro que

$$k_{\alpha_r}(t) \text{ no se anula } \iff |r| < 1$$

Para ver que se da la desigualdad del enunciado, supongamos que $|r| < 1$. Usando que $r\operatorname{sen} t \leqslant r \leqslant |r|$, para todo $t \in \mathbb{R}$, vemos que

$$r\operatorname{sen} t \overset{(*)}{\leqslant} |r| \iff -r\operatorname{sen} t \geqslant -|r| \iff 1 - r\operatorname{sen} t \geqslant 1 - |r|$$

Ahora, hay que acotar superiormente el denominador por $(|r| + 1)^3$. Se deduce directamente de la expresión de α_r' y de la desigualdad triangular

$$\alpha_r'(t) = (r - \operatorname{sen} t, \cos t) \Longrightarrow |\alpha_r'(t)| = \sqrt{(r - \operatorname{sen} t)^2 + \cos^2 t} \overset{(*)+|\cos t| \leqslant 1}{\leqslant} \sqrt{|r|^2 + 1} =$$

$$||r|^2 + 1| \leqslant ||r|^2| + |1| = |r| + 1 \Longrightarrow |\alpha_r'(t)|^3 \leqslant (|r| + 1)^3$$

de donde

$$\boxed{k_{\alpha_r}(t) = \frac{1 - r\operatorname{sen} t}{|\alpha_r'(t)|^3} \geqslant \frac{1 - |r|}{(|r| + 1)^3} \quad \forall t \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 2. Consideremos el cono

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3(x^2 + y^2) = z^2,\ z > 0\}$$

y la aplicación

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (r, \theta) & \longmapsto & F(r, \theta) := r(\cos(\theta), \sin(\theta), \sqrt{3}) \end{array}$$

a) Probar que C es una superficie regular orientable y que

$$F(]0, +\infty[\times\mathbb{R}) = C. \tag{1}$$

Demostrar que para cada $s \in \mathbb{R}$ la aplicación

$$X_s : \mathbb{R}^+\times]s, s + 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad X_s = F|_{\mathbb{R}^+\times]s,s+2\pi[}, \tag{2}$$

es una parametrización de C.

Vamos por orden. Primero vemos que C es una superficie (regular), por ser imagen inversa (no vacía) del valor regular 0, por la aplicación diferenciable

$$\begin{array}{rccl} f: & O & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \longmapsto & 3(x^2 + y^2) - z^2 \end{array}$$

donde $O = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ (abierto por ser preimagen de un abierto ($\mathbb{R}^+$) por la proyección $(x, y, z) \mapsto z$ (continua)). Entonces $\emptyset \neq C = f^{-1}(\{0\})$ (por ejemplo, $(0, 1, \sqrt{3}) \in C$). Comprobamos que 0 es un valor regular por definición, pues

$$\nabla f(x, y, z) = (6x, 6y, -2z)$$

Si $(x, y, z) \in C$, entonces $z > 0$, luego $-2z \neq 0$, y

$$\nabla f(x, y, z) \neq 0 \quad \forall(x, y, z) \in C$$

Veamos ahora que C es orientable, lo cual es sencillo teniendo en cuenta que la superficie viene dada como imagen inversa de un valor regular. Sabemos por teoría que la forma natural de definir la aplicación de Gauss que determina la orientación de C (denotada por N_0 pensando en el siguiente apartado) es:

$$\begin{array}{rccl} N_0: & C & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & N_0(x, y, z) = \dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}(x, y, z) = \dfrac{(6x, 6y, -2z)}{\sqrt{36x^2 + 36y^2 + 4z^2}} \end{array}$$

El denominador no se anula nunca por ser C superficie regular, luego N_0 está definida en todo C, es diferenciable (tipo a)) y, por definición, C es orientable.

Estudiamos ahora que se cumpla (1). Lo probamos por doble contenido.

Demostración.

$\subseteq$) Sea $(x,y,z) \in F(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. Entonces, existen $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tal que $(x,y,z) = F(r,\theta) := (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{3}r)$. Ahora, tenemos que ver que se cumple que $3(x^2+y^2) = z^2$ para que $(x,y,z) \in C$. Igualando componente a componente, primero calculamos el miembro izquierdo

$$3(x^2+y^2) = 3(r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta) = 3(r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)) = 3r^2$$

y luego el miembro derecho

$$z^2 = (\sqrt{3}r)^2 = 3r^2$$

Como $r \in \mathbb{R}^+$, $z = \sqrt{3}r > 0$. Por definición entonces $(x,y,z) \in C$.

$\supseteq$ Sea $(x,y,z) \in C$. Entonces $3(x^2+y^2) = z^2$ y $z > 0$. Tenemos que definir r y θ convenientemente. En este punto deberíamos reconocer que estamos ante algo al menos similar al cambio de coordenadas cartesianas a polares, por lo que estas definiciones deben ser también similares. En primer lugar definimos

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

Está claro que $r \geqslant 0$. Veamos que $r > 0$. Si fuera $r = 0$, entonces $x^2+y^2 = 0$, de donde $x = 0 = y$. Por la ecuación del cono, $z^2 = 3(x^2+y^2) = 0$, y debería ser $z = 0$, lo cual es una contradicción con que $(x,y,z) \in C$. Como $(x,y) \neq (0,0)$, podemos escribir (x,y) en coordenadas polares. Es decir, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$ (esto se debe a que, dividiendo entre r ambas ecuaciones, el punto $(x/r, y/r)$ tiene módulo 1, es decir, está en $\mathbb{S}^1$, y sabemos que la circunferencia goniométrica puede parametrizarse como $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$). Usando que $(x,y,z) \in C$:

$$z^2 = 3(x^2+y^2) = 3(r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)) = 3r^2$$

Así, será $z = \pm\sqrt{3}r$, pero como $z > 0$ (porque $(x,y,z) \in C$) y $r > 0$ (porque $r = \sqrt{x^2+y^2}$, y $(x,y) \neq (0,0)$) debe ser $z = \sqrt{3}r$. De esta manera

$$(x,y,z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{3}r) = F(r,\theta) \quad r \in \mathbb{R}^+, \theta \in \mathbb{R}$$

y en particular $(x,y,z) \in F(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. $\square$

Falta por ver en este apartado que la aplicación (2) es una parametrización (local) según la definición vista en teoría. Denotaremos $U_s = \mathbb{R}^+ \times]s, s+2\pi[$ para cada $s \in \mathbb{R}$, y

$$\begin{array}{rccl} X_s : & U_s & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (r,\theta) & \longmapsto & X_s(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{3}r) \end{array}$$

Hay que probar que X_s es una parametrización local de C. Lo primero es que el dominio de la parametrización U_s es abierto en $\mathbb{R}^2$ por ser producto de abiertos de $\mathbb{R}$. Las componentes de X_s son $r\cos\theta$, $r\,\text{sen}\,\theta$ y $\sqrt{3}r$, todas ellas funciones diferenciables de (r,θ), luego X_s es diferenciable (en ambos casos en el sentido del análisis).

Ahora, obtenemos $X_s(U_s)$, con el fin a su vez de determinar el entorno parametrizado V_s correspondiente por X_s. Para que resulte más sencillo, hacemos primero las dos siguientes consideraciones. Intuitivamente, si fijamos $r \in \mathbb{R}^+$, y consideramos la función de una variable $g(\theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, \sqrt{3}r)$, obtenemos una circunferencia horizontal (paralela al plano xy) a altura $\sqrt{3}r$ del cono. Por otro lado, si fijamos $\theta \in \mathbb{R}$, y consideramos la función de una variable $h(r) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, \sqrt{3}r)$, con $r > 0$, obtenemos una generatriz o semirrecta del cono (que parte del origen, que no pertenece al cono). En el dominio U_s estamos quitando los ángulos $\theta = s$ y $\theta = s + 2\pi$. Sin embargo, ambos ángulos representan la misma dirección de la generatriz por la 2π-periodicidad del seno y del coseno, pues $(\cos s, \text{sen}\, s) = (\cos(s+2\pi), \text{sen}(s+2\pi))$, por lo que realmente estamos dejando de considerar solo una posible dirección determinada por $\theta = s$. Los puntos del cono con esta dirección son los puntos de la forma $r(\cos s, \text{sen}\, s, \sqrt{3})$, con $r > 0$. Como r varía en $\mathbb{R}^+$, estamos quitando toda la semirrecta

$$R_s^+ = \{\rho(\cos s, \text{sen}\, s, \sqrt{3}) : \rho > 0\}$$

Con estas ideas vamos a demostrar que $X_s(U_s) = C \setminus R_s^+$, por doble contenido.

Demostración.

$\subseteq$) Sea $(x,y,z) \in X_s(U_s)$. Entonces, existe $(r,\theta) \in U_s$ tal que

$$(x,y,z) = X_s(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, \sqrt{3}r)$$

Por un lado,

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = r^2$$

y por el otro

$$z^2 = 3r^2$$

luego $3(x^2+y^2) = z^2$, y como $r \in \mathbb{R}^+$, $z = \sqrt{3}r > 0$, luego $(x,y,z) \in C$. Como $\theta \in \,]s, s+2\pi[$, entonces $(x,y,z) \notin R_s^+$, luego $(x,y,z) \in C \setminus R_s^+$.

($\supseteq$ Sea $(x,y,z) \in C \setminus R_s^+$. Como $(x,y,z) \in C$, se tiene que $3(x^2+y^2) = z^2$, con $z > 0$. Usando las ideas de la demostración del contenido hacia la izquierda para ver que se cumplía (1), definimos nuevamente $r = \sqrt{x^2+y^2}$, y ya sabemos que $r > 0$, así como que al ser $(x,y) \neq (0,0)$, existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x = r\cos\theta_0$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta_0$. Además sabemos que $z = \sqrt{3}r$. Por tanto,

$$(x,y,z) = (r\cos\theta_0, r\,\text{sen}\,\theta_0, \sqrt{3}r)$$

Usando que $(x,y,z) \notin R_s^+$, su dirección no es la de s, es decir,

$$\theta_0 \not\equiv s \mod 2\pi$$

Existe por tanto $\theta \in]s, s+2\pi[$ (de nuevo, por la 2π-periodicidad del seno y del coseno) tal que

$$\cos\theta = \cos\theta_0 \qquad \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta_0$$

de donde

$$(x, y, z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{3}r) = X_s(r, \theta)$$

Como $r > 0$ y $\theta \in]s, s+2\pi[$, entonces $(r, \theta) \in U_s$. Concluimos entonces que $(x, y, z) \in X_s(U_s)$. $\square$

Ahora, dado que ya hemos probado que $X_s(U_s) = C \setminus R_s^+$, el entorno parametrizado de la definición de parametrización que tomaremos será claramente $V_s = C \setminus R_s^+$. Falta probar que $X_s : U_s \to V_s$ es un homeomorfismo y que $(dX_s)_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $q \in U_s$.

Para lo primero, ya sabemos que $X_s : U_s \to V_s$ es sobreyectiva por definición de V_s. Debemos ver que X_s es inyectiva, y que $X_s^{-1} : V_s \to U_s$ es continua. La inyectividad se deduce fácilmente, pues, si $X_s(r, \theta) = X_s(\rho, \varphi)$, con $(r, \theta), (\rho, \varphi) \in U_s$, entonces, coordenada a coordenada

$$(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{3}r) = X_s(r, \theta) = X_s(\rho, \varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\operatorname{sen}\varphi, \sqrt{3}\rho) \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} r\cos\theta = \rho\cos\varphi \\ r\operatorname{sen}\theta = \rho\operatorname{sen}\varphi \\ \sqrt{3}r = \sqrt{3}\rho \end{cases}$$

De la comparación entre terceras coordenadas se deduce que, al ser $\sqrt{3} > 0$, $r = \rho > 0$. Entonces, en las dos primeras ecuaciones pueden simplificarse las amplitudes de los senos y cosenos, quedando

$$\begin{cases} \cos\theta = \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

de donde $\theta - \varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$, pero $\theta, \varphi \in]s, s+2\pi[$, por lo que necesariamente $\theta = \varphi$, y a su vez, $(r, \theta) = (\rho, \varphi)$, luego X_s es inyectiva.

La aplicación inversa estará dada por

$$\begin{array}{rccl} X_s^{-1}: & V_s & \longrightarrow & U_s \\ & (x, y, z) & \longmapsto & X_s^{-1}(x, y, z) = (r, \theta) \end{array}$$

La primera componente de la aplicación inversa ya sabemos que es $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, con $r > 0$. Para la segunda, correspondiente con θ, usamos que (x, y, z) es un punto de $V_s = C \setminus R_s^+$, luego la dirección de (x, y) no es la de s. Existe pues un único ángulo $\theta \in]s, s+2\pi[$, tal que $(x, y) = r(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Denotamos a dicho ángulo $\theta = \arg_s(x, y)$. Así, la inversa anterior viene dada por $X_s^{-1}(x, y, z) := (\sqrt{x^2 + y^2}, \arg_s(x, y)) = (r, \theta)$. Al ser composición de funciones continuas cada componente (la segunda es continua ya que el intervalo es de longitud 2π, pero abierto), X_s^{-1} es continua. Por lo tanto, $X_s : U_s \to V_s$ es un homeomorfismo.

Falta por ver que la diferencial es inyectiva, lo cual sabemos por teoría que equivale a ver que las parciales $(X_s)_r$ y $(X_s)_\theta$ son linealmente independientes. En este caso, dado que $X_s(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{3}r)$, calculamos

$$(X_s)_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \sqrt{3})$$

$$(X_s)_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$$

y como

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & \sqrt{3} \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-\sqrt{3}r\cos\theta, -\sqrt{3}r\operatorname{sen}\theta, r)$$

y $r > 0$, se deduce que $(X_s)_r(r,\theta) \times (X_s)_\theta(r,\theta) \neq 0 \quad \forall (r,\theta) \in U_s$.

En definitiva, hemos demostrado que $X_s : U_s \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización local de C, donde el entorno parametrizado es $V_s = C \setminus R_s^+$.

b) Demostrar que existe una única aplicación de Gauss $N : C \to \mathbb{S}^2$ tal que

$$N \circ F = \frac{F_r \times F_\theta}{\|F_r \times F_\theta\|}. \tag{3}$$

Determinar la expresión local en la carta X_s de C, $s \in \mathbb{R}$, de la primera forma fundamental, la segunda forma fundamental, el endomorfismo de Weingarten, la curvatura de Gauss, la curvatura media y las curvaturas y direcciones principales (en la dirección de N). Determinar para cada $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y $\omega \in \mathbb{R}^2$ la única geodésica en C que pasa por $G(p)$ con velocidad $dG(p) \in T_{G(p)}C$.

Nuevamente seguimos el orden de aparición de lo que se pide del apartado. Primero, recordamos del apartado anterior que $X_s = F_{|\mathbb{R}^+ \times]s,s+2\pi[}$, luego

$$F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{3}r)$$
$$F_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \sqrt{3})$$
$$F_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$$
$$F_r \times F_\theta = (-\sqrt{3}r\cos\theta, -\sqrt{3}r\operatorname{sen}\theta, r)$$

Ahora,

$$\|F_r \times F_\theta\| = \sqrt{(-\sqrt{3}r\cos\theta)^2 + (-\sqrt{3}r\operatorname{sen}\theta)^2 + r^2} = \sqrt{3r^2 + r^2} \overset{r\geq 0}{=} 2r$$

luego

$$\frac{F_r \times F_\theta}{\|F_r \times F_\theta\|} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta, -\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta, \frac{1}{2}\right)$$

Esto sugiere definir $N : C \to \mathbb{S}^2$ como $N(x,y,z)$ tal que $(x,y,z) = F(r,\theta)$ para cierto $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ y tal que

$$N(F(r,\theta)) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta, -\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta, \frac{1}{2}\right)$$

Vemos que está bien definida ya que si $(r,\theta),(\rho,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$, con $F(r,\theta) = F(\rho,\varphi)$ entonces por lo que ya hemos visto en la demostración de la inyectividad de X_s, $r=\rho$ y $(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta) = (\cos\varphi,\operatorname{sen}\varphi)$, luego

$$\theta \equiv \varphi \text{ mód } 2\pi$$

y $N(F(r,\theta)) = N(F(\rho,\varphi))$.

Obtenemos ahora la expresión explícita de $N(x,y,z)$, con $p=(x,y,z)\in C$. Entonces por (1), $p=F(r,\theta)$, con $r=\sqrt{x^2+y^2}>0$ y $\theta\in\mathbb{R}$ determinado por

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

Por tanto,

$$N(x,y,z) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{\sqrt{3}y}{2\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{1}{2}\right)$$

Ahora es fácil ver que $N: C\to\mathbb{S}^2$, pues

$$\|N(x,y,z)\|^2 = \frac{3x^2}{4(x^2+y^2)} + \frac{3y^2}{4(x^2+y^2)} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + \frac{1}{4} = 1$$

N es diferenciable tipo c), ya que $N = i\circ N: C\to\mathbb{R}^3$ vista como aplicación $C\to\mathbb{R}^3$ lo es (en el sentido a)), porque sus componentes son restricciones a C de funciones diferenciables definidas en el abierto

$$O' = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2>0\}$$

Por tanto $i\circ N$ es diferenciable (tipo a)), y entonces $N: C\to\mathbb{S}^2$ es diferenciable tipo c) por definición.

Por construcción, N es normal a la superficie, pues N verifica (3), y en particular, N es perpendicular al plano tangente de C en cada punto $p\in C$, dado que $T_pC = \langle (X_s)_r, (X_s)_\theta\rangle$, y $N(p)$ es un producto vectorial de estos dos vectores.

Podemos afirmar ya que N es una aplicación de Gauss. Veamos que es única. Supongamos que existe otra aplicación de Gauss $\tilde{N}: C\to\mathbb{S}^2$ cumpliendo (3). Queremos ver que $\tilde{N} = N$. Sea $p\in C$. Por (1), existen $(r,\theta)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ tales que $p = F(r,\theta)$. Entonces

$$\tilde{N}(p) = \tilde{N}(F(r,\theta)) = (\tilde{N}\circ F)(r,\theta)$$

Por la propiedad que verifica $\tilde{N}$,

$$(\tilde{N}\circ F)(r,\theta) = \frac{F_r\times F_\theta}{\|F_r\times F_\theta\|}(r,\theta)$$

Sin embargo, N también cumple (3), luego

$$\frac{F_r \times F_\theta}{\|F_r \times F_\theta\|}(r,\theta) = (N \circ F)(r,\theta) = N(F(r,\theta)) = N(p)$$

Como $p \in C$ era arbitrario, concluimos que $\tilde{N} = N$, luego la aplicación de Gauss es única.

Obtenemos ahora el resto de cosas que pide el apartado. En la carta $X_s = F_{|U_s}$ usamos las coordenadas (r,θ). La base del plano tangente $T_{X_s(r,\theta)}C$ es $B = \{(X_s)_r, (X_s)_\theta\}$. Ya tenemos

$$(X_s)_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \sqrt{3})$$

$$(X_s)_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$$

La primera forma fundamental sabemos que se define como

$$\begin{array}{rccc} g_p: & T_pC \times T_pC & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (v,w) & \longmapsto & g_p(v,w) := \langle v,w\rangle \end{array}$$

En la carta X_s tomamos $p = X_s(r,\theta)$. Ahora, obtenemos igual que en los ejemplos vistos en teoría los coeficientes de la primera forma fundamental

$$E = \langle (X_s)_r, (X_s)_r\rangle = |X_r|^2 = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta + 3 = 4$$

$$F = \langle (X_s)_r, (X_s)_\theta\rangle = -r\cos\theta\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 0 = 0$$
$$G = \langle (X_s)_\theta, (X_s)_\theta\rangle = |X_\theta|^2 = r^2\operatorname{sen}^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2$$

Por lo tanto, la matriz de la primera forma fundamental g_p en la base B es

$$\boxed{M_B(g_p) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}}$$

Ahora, la aplicación de Gauss en la carta X_s es

$$N^{X_s} = N \circ X_s = \frac{(X_s)_r \times (X_s)_\theta}{\|(X_s)_r \times (X_s)_\theta\|} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\cos\theta, -\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta, 1)$$

Obtenemos las parciales respecto de r y respecto de θ

$$(N^{X_s})_r = (0,0,0)$$

$$(N^{X_s})_\theta = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta, -\sqrt{3}\cos\theta, 0)$$

Como $(X_s)_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$, se tiene que

$$(N^{X_s})_\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2r}(X_s)_\theta$$

El endomorfismo de Weingarten sabemos que viene dado por

$$A_{X_s} = -dN^{X_s}$$

Por lo tanto

$$A_{X_s}((X_s)_r) = -(N^{X_s})_r = 0$$

$$A_{X_s}((X_s)_\theta) = -(N^{X_s})_\theta = \frac{\sqrt{3}}{2r}(X_s)_\theta$$

y así, en la base B, la matriz del endomorfismo de Weingarten es

$$\boxed{M_B(A_{X_s}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2r} \end{pmatrix}}$$

Nuevamente, para $p = X_s(r,\theta) \in C$, recordamos la definición de la segunda forma fundamental

$$\begin{array}{rrcl} \sigma_p : & T_pC \times T_pC & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (v,w) & \longmapsto & \sigma_p(v,w) := \langle A_p(v), w \rangle \end{array}$$

Obtenemos los coeficientes de la matriz de la segunda forma fundamental. Para ello, usamos un resultado conocido de teoría: si Σ es la matriz de la segunda forma fundamental σ_p (en la base B), M es la matriz de la primera forma fundamental respecto de la base B, y A_{X_s} es la matriz del endomorfismo de Weingarten respecto de B, se cumple que

$$A_{X_s} = M^{-1}\Sigma$$

Multiplicando por M a la izquierda, y usando que en nuestro caso $A_{X_s} = M_B(A_{X_s})$, y $M = M_B(g_p)$, tenemos que

$$\boxed{\Sigma = MA_{X_s} = M_B(g_p)M_B(A_{X_s}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}r \end{pmatrix}}$$

La curvatura de Gauss y curvatura media vienen dadas, respectivamente, por

$$K(p) = \det A_p \quad H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A_p)$$

y en este ejercicio $p = X_s(r,\theta)$ y $A_p = M_B(A_{X_s})$. La curvatura de Gauss es

$$\boxed{K = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2r} \end{vmatrix} = 0}$$

y la curvatura media es

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A_p) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2r}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4r}}$$

Las direcciones principales son las rectas vectoriales generadas por los vectores propios asociados a cada uno de los valores propios del endomorfismo de Weingarten. Sabemos por teoría que estos últimos son aplicaciones $k_1, k_2 : C \to \mathbb{R}$ con $k_1(p) \leqslant k_2(p)$ que verifican

$$H = k_1 \cdot k_2 \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Ya conocemos K y H, por lo que se trata de resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} k_1 k_2 = 0 \\ \dfrac{1}{2}(k_1 + k_2) = \dfrac{\sqrt{3}}{4r} \end{cases}$$

La segunda ecuación equivale a que

$$k_1 + k_2 = \frac{\sqrt{3}}{2r}$$

y de la primera se deduce que o bien $k_1 = 0$ o bien $k_2 = 0$. Siguiendo el convenio $k_1(p) \leqslant k_2(p)$, como $\sqrt{3}/(2r) > 0$, deducimos que

$$\boxed{k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{\sqrt{3}}{2r}}$$

Ahora, las direcciones principales las obtenemos viendo quiénes son los vectores propios de los subespacios propios de A_{X_s}. Como

$$A_{X_s}((X_s)_r) = 0$$

$$A_{X_s}((X_s)_\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2r}(X_s)_\theta$$

está claro que $\langle (X_s)_r \rangle$ es la dirección principal asociada a $k_1 = 0$, y $\langle (X_s)_\theta \rangle$ es la dirección principal asociada a $k_2 = \sqrt{3}/(2r)$.

La pregunta sobre geodésicas no se responde dado que ni siquiera se ha definido en teoría qué es una geodésica.

c) Identificando $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ con la superficie regular

$$(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \times \{0\}$$

de $\mathbb{R}^3$, probar que la aplicación

$$G : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow C, \qquad G(u,v) = \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}(u^2 - v^2, 2uv, \sqrt{3}(u^2+v^2)),$$

es una isometría local entre superficies regulares.

No se responde dado que ni siquiera se ha definido en teoría qué es una isometría y menos aún una isometría local.

Ejercicio 3. Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes cuestiones:

a) Si S_1, S_2 son superficies regulares orientables isométricas en $\mathbb{R}^3$, entonces S_1 es mínima si y sólo si S_2 es mínima.

b) El hiperboloide
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 + 1\}$$
es isométrico al cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

No se responde por el mismo motivo que en el 2c): ni siquiera se ha definido en teoría qué son dos superficies isométricas, ni qué es una superficie mínima.